

## ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КАРТ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПЛОСКИХ КООРДИНАТ

**Выбор и применение плоских координат.** Для мелкомасштабного картографирования наиболее удобна общая для Земли система координат, в которой положения точек определяются геодезическими широтами и долготами. Хранение этих широт и долгот в базах данных геоинформационных систем позволяет отображать географическую ситуацию в разных, наиболее подходящих для конкретных задач, картографических проекциях.

Для получения топографических карт, крупномасштабных тематических карт и создания координатной среды в ГИС более удобны плоские прямоугольные координаты. Они позволяют пользоваться простыми математическими формулами, что облегчает обработку измерений. То обстоятельство, что координаты опорных пунктов даются в плоскости некоторой проекции, позволяет материалы топографических съемок укладывать непосредственно в рамки геодезической сети без введения каких-либо поправок — снимаемая местность уже в процессе съемки оказывается изображенной в заданной картографической проекции.

Важен выбор проекции, наиболее подходящей для введения плоской системы координат. В любой проекции длины искажены, следствием чего масштаб в разных местах карты различен. В общем случае в окрестности каждой точки масштаб различен даже по разным направлениям. Простота учета искажений длин и углов выдвигает основное требование — в окрестности каждой точки масштаб по всем направлениям должен быть постоянным. Таким условиям соответствуют только равноугольные проекции. Кроме того, необходимо, чтобы искажения длин, по крайней мере, в рамках листа топографической карты были в границах графической точности, а главное, чтобы эти искажения можно было легко и просто учитывать в пределах значительных территорий. Малость искажений и простота их учета приводят к необходимости отображать земную поверхность по зонам ограниченных размеров. Желательно, чтобы при минимальном числе зон их размеры были максимальны, и все зоны единообразны. В условиях интенсивного обмена геоинформацией и взаимосвязанности геодезических и картографических данных важно, чтобы плоскую систему координат легко было распространить на значительные территории — на весь мир. Итак, основными требованиями к проекции будут:

Равноугольность.

Малые искажения в пределах листа топографической карты.

Простота учета искажений в границах зон значительных размеров.

Минимальное количество зон.

Единообразие зон.

Легкость распространения системы плоских координат на весь мир.

Проекции, при помощи которых вводят плоские координаты, называются *геодезическими*. Число таких равноугольных проекций невелико — азимутальная проекция Руссиля, коническая проекция Ламберта и поперечно-цилиндрические проекции Гаусса-Крюгера и *UTM* (*Universal Transverse Mercator*). Число зон в азимутальных и конических проекциях сравнительно велико и они не обладают единообразием. Наиболее полно перечисленным требованиям удовлетворяют получившие глобальное распространение проекции Гаусса-Крюгера и *UTM*. Они объединяют в себе все положительные качества: небольшое число зон; каждая зона охватывает значительную территорию, ограниченную двумя меридианами с разностью долгот в  $3^{\circ}$  или  $6^{\circ}$ ; умеренное и легко учитываемое изменение масштабов в пределах зон; единообразие всех зон; универсальность и глобальность координатных систем.

**Изометрические координаты.** Геодезические проекции должны быть равноугольными. Это основное требование. В 1822 г. Копенгагенская Академия наук объявила конкурс на решение задачи общей теории равноугольных проекций. В 1825 г. К.Ф. Гаусс представил сочинение об отображении одной поверхности на другую с сохранением подобия в бесконечно малых частях. Если  $P, R, p, r$  – функции геодезических координат  $L, B$ , то решением будет аналитическая (дифференцируемая) функция комплексной переменной:



Карл Фридрих Гаусс  
(1777-1855)

$$P + iR = f(p + ir), \quad i = \sqrt{-1}.$$

Равноугольные проекции устанавливают при помощи так называемых *изометрических координат* эллипсоида и аналитических функций комплексной переменной:

$$x + iy = f(q + il),$$

где  $x, y$  - абсцисса и ордината в прямоугольной системе координат на плоскости,  $q, l$  - изометрические координаты на эллипсоиде. Для эллипсоида вращения они будут определены ниже. Аналитическая функция  $f(q + il)$  дифференцируема в комплексной области и удовлетворяет уравнениям Коши-Римана в частных производных:

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial l}, \quad \frac{\partial x}{\partial l} = -\frac{\partial y}{\partial q}.$$

Точка с координатами  $q, l$  на эллипсоиде, для которой производная данной функции  $f' \neq 0$ , отображается на плоскости точкой с координатами  $x, y$ . При этом в бесконечно малой области проекции масштаб изображения по всем направлениям один и тот же, а фигуры, преобразуясь в себе подобные, сохраняют форму. Такую проекцию называют равноугольной (конформной).

Определим координаты  $q$  и  $l$ . Рассмотрим бесконечно малые треугольники на плоскости и на эллипсоиде (рис.5.1).

Для длины отрезка на плоскости имеем:

$$dS^2 = dx^2 + dy^2.$$

На эллипсоиде катетами элементарного треугольника являются бесконечно малые дуги меридiana  $MdB$  и параллели  $rdL$ . Для длины элементарного отрезка имеем:

$$ds^2 = (MdB)^2 + (rdL)^2.$$

Под изометрическими координатами понимают такие, когда равным приращениям координат соответствуют равные приращения вдоль координатных линий. При равенстве дифференциалов  $dx = dy$  на плоскости образуется сетка квадратов. На эллипсоиде равенство дифференциалов  $dB = dL$  ведет к образованию элементарных трапеций, стороны в которых не равны, так как радиусы  $M \neq r$ . Таким образом, геодезические координаты на эллипсоиде *не обладают изометрией* - одинаковостью масштабов по любым направлениям. Это обстоятельство затрудняет использование геодезических координат при введении равноугольных проекций.

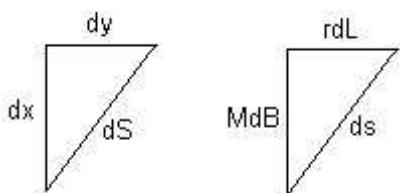


Рис. 5.1. Элементарные треугольники на плоскости и на эллипсоиде вращения

Преобразуем выражение для элементарного отрезка на эллипсоиде так, чтобы при равенстве дифференциалов аргументов элементарные координатные дуги на эллипсоиде между собой также были равны:

$$ds = r^2 (dq^2 + dL^2),$$

где дифференциал

$$dq = \frac{M}{r} dB. \quad (5.1)$$

Интегрируя, получаем:

$$q = \int_0^B \frac{M}{r} dB, \quad l = \int_{L_o}^L dL = L - L_o. \quad (5.2)$$

Величину  $q$  называют *изометрической широтой*. Изометрическими координатами эллипсоида вращения являются изометрическая широта и геодезическая долгота, отсчитываемая в радианах от произвольного меридиана долготы  $L_o$ . Изометрическая система координат характерна тем, что при равенстве дифференциалов  $dq = dl$  поверхность эллипса разбивается на бесконечно малые квадраты со сторонами  $rdl$ . Эти квадраты, конечно, не равны друг другу, поскольку радиус  $r$  является функцией широты.

После интегрирования формулы для изометрической широты  $q$  и для обратного перехода к широте  $B$  принимают вид:

$$q = \ln \sqrt{\left( \frac{1 + \sin B}{1 - \sin B} \right) \left( \frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right)^e}, \quad (5.3)$$

$$q = \ln \left\{ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \sqrt{\left( \frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right)^e} \right\} \quad (5.3a)$$

$$B = 2 \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\left( \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \right)^e} \exp q \right] - \frac{\pi}{2}, \quad (5.4)$$

где  $e$  - первый эксцентриситет эллипса вращения. Широта  $B$  вычисляется последовательными приближениями; итерации сходятся быстро, так как эксцентриситет  $e$  малая величина.

**Изометрические координаты в равноугольных проекциях.** Функции комплексной переменной от изометрических координат осуществляют равноугольное отображение. Например, *линейная* функция

$$x + iy = C(q + il)$$

представляет собой отображение поверхности эллипса на цилиндр радиуса  $C$ . После разделения действительной и мнимой частей, получим уравнения нормальной равноугольной цилиндрической проекции Меркатора:

$$x = Cq; \quad y = C(L - L_o).$$

В случае *показательной* функции имеем:

$$x + iy = Ce^{-\alpha[q - i(\pi - l)]} = Ce^{-\alpha q} (-\cos \alpha(L - L_o) + i \sin \alpha(L - L_o)).$$

Отсюда:

$$\rho = Ce^{-\alpha q}, \quad x = -\rho \cos \alpha(L - L_o), \quad y = \rho \sin \alpha(L - L_o).$$

Это уравнения нормальной равноугольной конической проекции, в которой параллели изображаются концентрическими окружностями радиусом  $\rho$ , а меридианы – пучком прямых;

угол между меридианами пропорционален разности их долгот. Приняв ( $\alpha = 1$ ), получим уравнения нормальной равноугольной азимутальной проекции.

Полагая разность долгот  $l$  малой величиной, разложим функцию в ряд Тейлора:

$$x + iy = f(q + il) = f(q) + \sum_{k=1}^n \frac{d^k f(q)}{k! dq^k} (il)^k. \quad (5.5)$$

В этом выражении мнимая единица принимает значения:

$$i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, \dots$$

Ряд убывающий, поэтому при некоторой конечной величине  $n$  его можно оборвать. Это уравнения некой равноугольной проекции, отображающей поверхность эллипсоида зонами небольшой шириной по долготе. Разделяя в (5.5) действительные и мнимые части, получаем уравнения для плоских прямоугольных координат в некоторой равноугольной проекции:

$$\begin{aligned} x &= f(q) - \frac{d^2 f(q)}{2dq^2} l^2 + \frac{d^4 f(q)}{24dq^4} l^4 - \frac{d^6 f(q)}{720dq^6} l^6 + \dots \\ y &= \frac{df(q)}{dq} l - \frac{d^3 f(q)}{6dq^3} l^3 + \frac{d^5 f(q)}{120dq^5} l^5 + \dots \end{aligned}$$

**Справка о координатах в проекции Гаусса.** Проекция Гаусса была введена выдающимся немецким ученым Карлом Фридрихом Гауссом (1777-1855 гг.) для обработки ганноверской триангуляции 1821-1825 гг. В 1912 г. математически ее развил немецкий геодезист Л. Крюгер, и она стала называться проекцией Гаусса-Крюгера. Проекция равноугольная, сохраняет длины на среднем меридиане и симметрична относительно него.

В РФ проекция Гаусса-Крюгера используется для построения *государственной* системы координат и для создания *местных* систем координат.

В государственной системе координат поверхность земного эллипсоида делится на 3-х или 6-ти градусные зоны, ограниченные меридианами от экватора до  $84^\circ$  северной широты. Зоны нумеруют с запада на восток, начиная с нулевого меридиана. В каждой зоне строится своя прямоугольная система координат. Ось абсцисс  $X$  ориентирована на север по среднему меридиану, который называют *осевым* или *средним*. Ось ординат  $Y$  служит прямая линия, перпендикулярная к осевому меридиану, являющаяся изображением экватора. Такой выбор координатных осей позволяет наряду с прямоугольными координатами использовать полярную систему координат, одновременно сохранять у людей привычку ориентироваться относительно направления на север и применять весь математический аппарат, где обычно ось  $X$  ориентирована влево (на восток), а ось  $Y$  — вверх (на север).

В проекции Гаусса-Крюгера осевой меридиан изображается без искажений (масштаб длин  $m_0 = 1$ ). Наибольшие искажения на краях зоны. На краях зоны в средних широтах частный масштаб длин  $m \approx 1,0009$ . Л. Крюгер предлагал умножить координаты  $x, y$  на некоторый множитель  $m_0 < 1$  для того, чтобы искажения длин на краях зоны уменьшить вдвое, но это его предложение в данной проекции не реализовано.

В 1919 г. Г. Баумгарт предложил в качестве осевых (средних) меридианов трехградусных зон использовать меридианы с восточными долготами  $3^\circ, 6^\circ, 9^\circ, 12^\circ, \dots$ , номера зон указывать перед ординатами, а, чтобы все ординаты были положительными, прибавить к ним 500 000 м [12, с. 5]. Эти предложения были приняты многими государствами.

Первым государством, распространившим координаты Гаусса-Крюгера, была Австрия [12, 4 с.]. Там их применяют с 1917 г. В 1928 г. эта проекция введена в СССР. В начале ее использовали только для топографических карт масштабов крупнее 1:500 000. С 1939 г. ее стали применять и для карт масштаба 1:500 000. В 80-х годах она была распространена на

весь масштабный ряд топографических карт, включая все топографические планы и карты миллионного масштаба.

В России применяют шестиградусные зоны с осевыми меридианами  $3^{\circ}, 9^{\circ}, 15^{\circ}$  и т.д. Предусмотрены перекрытия смежных зон на востоке и западе; при этом до широты  $28^{\circ}$  перекрытия составляют  $1^{\circ}$ , в широтах  $28^{\circ}-76^{\circ}$  —  $2^{\circ}$  и в широтах более  $76^{\circ}$  —  $3^{\circ}$  [5]. Таким образом, с 1977 г. на всей территории СССР установлена не 6-и, а 10 градусная зона; на стыке 6-и градусных зон введена полоса перекрытия в  $2^{\circ}$  к востоку и  $2^{\circ}$  к западу [9, с. 250]. На всех листах карт, расположенных в полосе перекрытия, за рамками карты указывают выходы километровой сетки соседней зоны.

Трехградусные зоны применяют при построении топографических планов, при этом осевые меридианы совпадают с осевыми и граничными меридианами шестиградусных зон.

При съемках городов и территорий под строительство крупных инженерных сооружений и в других целях применяются и местные системы координат [3, с. 57, 71].

Обобщением проекции Гаусса – Крюгера является проекция *UTM*. Проекция *UTM* разработана в 1936 г. Международным союзом геодезии и геофизики. В 1947 г. она принята Вооруженными силами США. Применяется в НАТО. В настоящее время с теми или иными модификациями, касающимися долгот осевых меридианов, ширины зон и координат начальных точек, используется многими национальными и международными картографическими организациями всего мира.

В *UTM* на осевом меридиане частный масштаб длин  $m = 0,9996$ . В проекции образуются две параллельные среднему меридиану линии нулевых искажений, расположенные на расстоянии около 180 км по обе от него стороны. На границе зон в южных широтах частный масштаб длин приблизительно равен 1,0003.

Применяются шестиградусные зоны. Зоны простираются в полосе от параллели  $80^{\circ}$  ю. ш. до параллели  $84^{\circ}$  с. ш. В полярных районах проекцию *UTM* заменяет нормальная азимутальная стереографическая проекция *UPS* (*Universal Polar Stereographic projection*).

Зоны нумеруются, начиная от меридиана первенства. Поэтому 1-я зона ограничена меридианами с западными долготами  $180^{\circ}$  и  $174^{\circ}$ , а 60-я зона — меридианами с восточными долготами  $174^{\circ}$  и  $180^{\circ}$ . В *UTM* абсциссе  $x$  координат Гаусса-Крюгера соответствует *северное положение*  $y$ , а ординате  $y$  — *восточное положение*. Средний меридиан зоны имеет восточное положение 500 000 м. Перед восточным положением пишется номер зоны. Северное положение точки на экваторе для Северного полушария равно 0, а для Южного полушария — 10 000 000 м.

Подобная проекция шириной зон в  $6^{\circ}$  под названием Гаусса-Боага (*Gauss-Boaga*) применяется в Италии. В ней частный масштаб длин, как и в проекции *UTM*,  $m_0 = 0,9996$ .

**Необходимые формулы.** Точки  $Q_1, Q_2$  эллипсоида отображены на плоскости в проекции Гаусса-Крюгера

(рис. 5.2). Необходимы формулы для вычисления координат  $x$ , у этих точек по их широтам  $B$  и долготам  $L$ , и формулы для обратного перехода от  $x, y$  к  $B, L$ . Геодезическая линия  $s$  эллипсоида на плоскости изображается кривой  $S$ . Обычно на плоскости пользуются хордой  $d$ . Для перехода от длины  $s$  на эллипсоиде к длине хорды  $d$  на плоскости надо знать масштаб  $t$  изо-

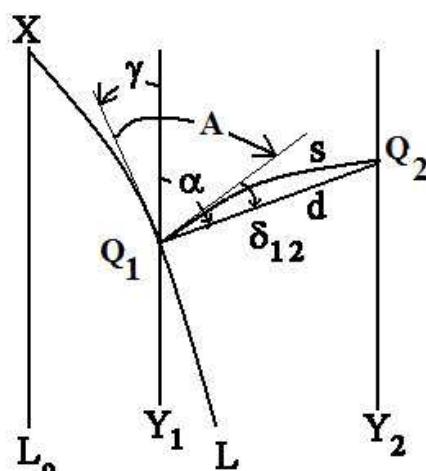


Рис. 5.1. Точки  $Q_1, Q_2$  эллипсоида отображены на плоскости в проекции Гаусса-Крюгера

брожения геодезической линии и поправку к её длине. В точке плоскости  $Q_1$  угол  $\gamma$  между изображением меридиана и линией, параллельной оси абсцисс, называют *гауссовым сближением меридианов*. Малый угол  $\delta$  — *поправка за кривизну изображения геодезической линии* на плоскости. Следовательно, еще нужны формулы для определений углов  $\gamma$  и  $\delta$ .

Для перехода от азимута  $A$  геодезической линии к дирекционному углу  $\alpha$  хорды  $d$  можно записать следующее равенство (рис. 5.1):

$$\alpha = A - \gamma + \delta_{12}$$

Имея на плоскости координаты  $x_1, y_1$  одной точки, координаты второй точки  $x_2, y_2$  вычисляют по формулам (прямая задача):

$$x_2 = x_1 + d \cos \alpha, \quad y_2 = y_1 + d \sin \alpha.$$

Имея на плоскости координаты двух точек  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$ , решают обратную задачу:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

При наличии всех указанных формул обработка геодезических измерений в границах заданной зоны выполняется следующим образом:

Геодезические координаты исходной точки, длину исходной линии и ее геодезический азимут пересчитывают в плоские прямоугольные координаты, в длину прямой линии и дирекционный угол соответственно. Если исходными являются два пункта, то их геодезические координаты пересчитывают в плоские прямоугольные координаты. По плоским координатам, решая обратную задачу, вычисляют на плоскости длину прямой между исходными точками и ее дирекционный угол. В целях контроля выполняют обратный переход от прямоугольных к геодезическим координатам.

В измеренные длины вводят поправки из-за изменения их масштаба, а в направления — поправки из-за замены криволинейного изображения геодезической линии хордой.

Дальнейшую обработку выполняют по математическим формулам для плоскости.

**Вычисление прямоугольных координат Гаусса-Крюгера и UTM.** Рассмотрим подробнее вычисления прямоугольных геодезических координат в равноугольной поперечноцилиндрической проекции. В проекции Гаусса-Крюгера ставится условие, чтобы длина  $X$  дуги меридиана эллипсоида, принимаемого на плоскости проекции в качестве осевого, изображалась без искажений. Следовательно:

$$l = 0, \quad y = 0, \quad x = X = f(q), \quad df(q) = dX$$

Для первых двух производных ряда Тейлора находим:

$$\begin{aligned} \frac{df(q)}{dq} &= \frac{dX}{dq} = \frac{dX}{dB} \frac{dB}{dq}; \\ \frac{d^2f(q)}{dq^2} &= \frac{d^2X}{dq^2} = \frac{d}{dB} \left( \frac{dX}{dq} \right) \frac{dB}{dq}. \end{aligned}$$

Аналогично составляются формулы и для производных высших порядков. Учитывая формулы дифференциалов для дуги меридиана и изометрической широты, имеем:

$$dX = M dB, \quad dB = \frac{r}{M} dq,$$

Следовательно,

$$\frac{dX}{dB} = M, \quad \frac{dB}{dq} = \frac{r}{M} = \frac{N \cos B}{M}.$$

Ранее (формула (3.9), Лекция 3) установили:

$$\frac{dr}{dB} = -M \sin B.$$

Это имеет место в поперечно-цилиндрической проекции Гаусса-Крюгера, где масштаб на осевом меридиане равен  $m_o = 1$ .

Если на краю зоны наибольший масштаб равен  $m_{\max}$ , то, чтобы максимальные искажения длин уменьшить вдвое, масштаб на осевом меридиане следует выбрать равным:

$$m_o = \frac{2}{1 + m_{\max}}.$$

Когда на краю зоны  $m_{\max} = 1,0008$ , то  $m_o = 0,9996$ . Именно такой масштаб использован в проекции *UTM*. Отсюда видно, что проекция *UTM* является обобщением проекции Гаусса – Крюгера. Между координатами Гаусса-Крюгера и *UTM* должна быть связь:

$$(x + iy)_{UTM} = m_0(x + iy)_{Гаусса-Крюгера}. \quad (5.6)$$

Получаем для случая  $m_o \neq 1$ :

$$\frac{dX}{dq} = m_o r; \quad \frac{d^2 X}{dq^2} = -m_o r \sin B.$$

Воспользуемся обозначениями:

$$t = \operatorname{tg} B; \quad \eta^2 = e^{12} \cos^2 B; \quad l = L - L_0 \quad (\text{радианы}).$$

С учётом сказанного, для прямоугольных координат Гаусса-Крюгера и *UTM* получаем:

$$x = m_0 \left( X + \frac{1}{2} N \sin B \cos Bl^2 + \frac{1}{24} N \sin B \cos^3 B (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) l^4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{720} N \sin B \cos^5 B (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330\eta^2 t^2) l^6 + \dots \right);$$

$$y = m_0 \left( N \cos B l + \frac{1}{6} N \cos^3 B (1 - t^2 + \eta^2) l^3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{120} N \cos^5 B (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2) l^5 + \dots \right).$$

По этим формулам ординаты получают относительно осевого меридиана зоны. Поэтому к вычисленным значениям у следует прибавить 500 000 м и спереди приписать номер зоны.

Если разности долгот  $l \leq 4^0$ , точность вычисления координат не хуже 1 мм.

**Вычисление геодезических координат по координатам на плоскости.** Воспользуемся зависимостью между изометрическими координатами  $q, l$  и прямоугольными  $x, y$ :

$$q + il = F(x + iy), \quad l = L - L_o.$$

На эллипсоиде (рис. 5.2) задана геодезическими координатами точка  $Q(B, L)$ . На плоскости её координаты  $x, y$ . Абсцисса  $x$  на осевом меридиане равна дуге меридиана  $X$ , простирающейся от экватора до некоторой другой параллели  $B_x$ . Геодезическим широтам  $B, B_x$  соответствуют изометрические широты  $q, q_x$ . На осевом меридиане имеем

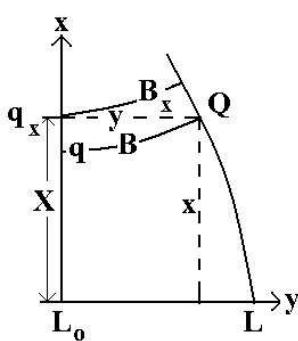


Рис. 5.2. Вычисление  
B, L по x, y

$$y = 0, l = 0, x = X, q = F(X) = q_x$$

В поперечно цилиндрических проекциях отображение выполняется по сравнительно узким зонам. Ордината  $y$  – малая величина. Исходная функция разлагается в ряд Тейлора; все переменные ряда вычисляются по широте  $B_x$ :

$$q + il = f(x + iy) = q_x + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left( \frac{d^k q}{dX^k} \right)_x (iy)^k.$$

Отделяя действительные и мнимые части и ограничиваясь членами шестого порядка, получаем:

$$q = q_x - \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 q}{dX^2} \right)_x l^2 + \frac{1}{24} \left( \frac{d^4 q}{dX^4} \right)_x l^4 - \frac{1}{720} \left( \frac{d^6 q}{dX^6} \right)_x l^6 + \dots$$

$$l = \left( \frac{dq}{dX} \right)_x l - \frac{1}{6} \left( \frac{d^3 q}{dX^3} \right)_x l^3 + \frac{1}{120} \left( \frac{d^5 q}{dX^5} \right)_x l^5 + \dots$$

Воспользуемся известными уравнениями:

$$dB = \frac{1}{M} dX, \quad dq = \frac{M}{r} dB, \quad \frac{dr}{dB} = -M \sin B.$$

Для производных имеем:

$$\frac{dB}{dX} = \frac{1}{M}, \quad \frac{dq}{dB} = \frac{M}{r} = \frac{M}{N \cos B}.$$

Отсюда находим необходимые производные:

$$\frac{dq}{dX} = \frac{dq}{dB} \frac{dB}{dX}, \quad \frac{d^2 q}{dX^2} = \frac{d}{dB} \left( \frac{dq}{dX} \right) \frac{dB}{dX}, \quad \dots$$

Получаем:

$$\frac{dq}{dX} = \frac{1}{N \cos B},$$

$$\frac{d^2 q}{dX^2} = \frac{d}{dB} \left( \frac{1}{N \cos B} \right) \frac{1}{M} = \frac{\operatorname{tg} B}{N^2 \cos B}.$$

Аналогично вычисляются и остальные производные. Все эти производные должны быть вычислены по широте  $B_x$ , соответствующей длине дуги меридиана  $X = x$ .

Далее необходимо от изометрических широт перейти к геодезическим широтам. Воспользуемся разложением в ряд Тейлора функции:

$$B = f(q) = f(q_x + (q - q_x)) = B_x + \left( \frac{dB}{dq} \right)_x (q - q_x) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 B}{dq^2} \right)_x (q - q_x)^2 + \dots$$

В итоге получаем формулы для вычисления геодезических широт и разности долгот:

$$B = B_x - \frac{t^2}{2M_x N_x} y^2 \left[ 1 - \frac{y^2}{12N_x^2} (5 + 3t_x^2 + \eta_x^2 - 9\eta_x^2 t_x^2) + \frac{y^4}{360N_x^4} (61 + 90t_x^2 + 45t_x^4) \right];$$

$$l = \frac{y}{N_x \cos B_x} \left[ 1 - \frac{y^2}{6N_x^2} (1 + 2t_x^2 + \eta_x^2) + \frac{y^4}{120N_x^4} (5 + 28t_x^2 + 24t_x^4 + 6\eta_x^2 + 8\eta_x^2 t_x^2) \right],$$

$$t = \tan B; \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 B; \quad L = L_o + l.$$

Пользуются формулами следующим образом: в ординате  $y$  отбрасывают номер зоны и вычитывают 500 000 м, абсциссу  $x$  рассматривают как дугу меридиана и по ней вычисляют широту  $B_x$ . По этой широте вычисляют все остальные величины. Результаты будут в радианах. Точность вычисления геодезических координат в пределах шестиградусной зоны  $\sim 0,0001''$ .

В случае координат *UTM*, как следует из уравнения (5.6), их необходимо изменить так, чтобы началом координат стала точка пересечения осевого меридиана с экватором, а затем их разделить на масштаб  $m_o$ .

**Гауссово сближение меридианов.** На рис. 5.3 в плоскости проекции Гаусса-Крюгера изображены элементарные отрезки дуги меридиана и параллели, пересекающиеся в некоторой точке  $c$ . Гауссово сближение, угол  $\gamma$ , определим из элементарного треугольника  $cde$ . Имеем:

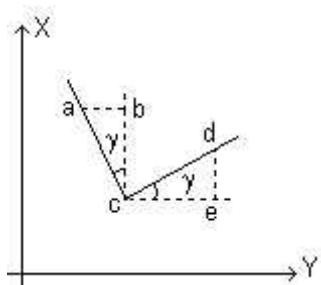


Рис. 5.3. Гауссово сближение меридианов

$$\tan \gamma = \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dl} : \frac{dy}{dl}.$$

Для частных производных в первом приближении получаем:

$$\frac{\partial x}{\partial l} = l N \sin B \cos B; \quad \frac{\partial y}{\partial l} = N \cos B.$$

Подставляя их в формулы выше, находим:

$$\gamma = (L - L_o) \sin B.$$

Получили приближенную формулу. Ее применяют в топографии для вычисления  $\gamma$  с точностью до  $0,1-1'$ . Из формулы видно, что сближение меридианов меняется от 0 на экваторе до значений  $\gamma = L - L_o$  у полюсов, где на краю шестиградусных зон  $\gamma \Rightarrow \pm 3^0$ . Знак  $\gamma$  при  $B > 0$  совпадает со знаком разности долгот  $l$ : к востоку от осевого меридиана он положителен, а к западу — отрицателен.

Сближение меридианов  $\gamma$  не зависит от масштаба осевого меридиана  $m_o$ .

Более точные формулы для гауссова сближения меридианов в функции  $l$  или  $y$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \gamma &= l \sin B + \frac{l^3}{3} \sin B \cos^2 B (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \\ &+ \frac{l^5}{15} \sin B \cos^4 B (2 - \tan^2 B), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{y}{N_o} \tan B_o \left\{ 1 - \frac{y^2}{3N_o^2} (1 + \tan^2 B_o - \eta_o^2 - 2\eta_o^4) + \right. \\ &\left. + \frac{y^4}{N_o^4} \frac{(2 + 5\tan^2 B_o + 3\tan^4 B_o)}{15} \right\}. \end{aligned}$$

В работе [1] предлагается формула другого вида:

$$\gamma = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{\sin B \sin 2l}{1 - (V \cos B \sin l)^2} \right),$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}.$$

**Поправка за кривизну изображения геодезической линии.** Эта поправка возникает вследствие того, что на плоскости в равноугольной проекции геодезическая линия отображается кривой, которую для удобства графических построений и вычислений заменяют хордой. Дадим приближенный вывод этой поправки. На рис. 5.4 на плоскости между точками  $Q_1(x_1, y_1)$  и  $Q_2(x_2, y_2)$  показаны изображение геодезической линии и ее хорда. Искомыми поправками являются уголки  $\delta$  между хордой и кривой. Для их определения точки  $Q_1$  и  $Q_2$  спроектируем на осевой меридиан. Получим точки  $Q_1^0$  и  $Q_2^0$ . Заменим участок эллипсоида сферой радиуса  $R$ . На сфере сумма углов в криволинейной фигуре  $Q_1^0 Q_2^0 Q_2 Q_1$  равна  $360^\circ + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - сферический избыток. Сферический избыток определяется отношением площади  $P$  данной фигуры к квадрату радиуса сферы  $R$ :

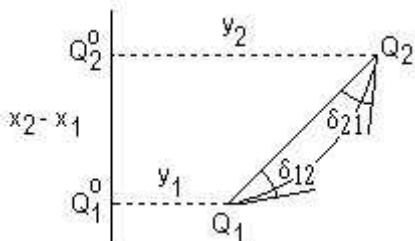


Рис. 5.4. Поправка за кривизну изображения геодезической линии

В соответствующей фигуре на плоскости сумма углов равна  $360^\circ + \delta_{12} + \delta_{21}$ . Поэтому

$$\varepsilon = \delta_{12} + \delta_{21}.$$

Полагая  $\delta_{12} \approx \delta_{21}$ , не учитывая знаки поправок, приравнивая площадь сферической фигуры  $P$  площади плоской трапеции  $Q_1^0 Q_2^0 Q_2 Q_1$  и умножая на число угловых секунд в радиане  $\rho''$ , получаем:

$$\delta_{12}'' \approx \delta_{21}'' = \frac{\varepsilon''}{2} = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{4R^2} \rho''.$$

Приближенно, учитывая знак, для поправки  $\delta_{12}$  получают:

$$\delta_{12}'' = -0,00253 y_m \Delta x,$$

где средняя ордината  $y_m$  и разность абсцисс  $\Delta x$  берутся в километрах, а поправку  $\delta_{12}$  получают в угловых секундах. Например, при  $y_m = 300$  км,  $\Delta x = 10$  км, получаем  $\delta_{12} = -7,6''$ . В топографических работах поправками такой величины пренебрегают. Однако, их учитывают при обработке измерений в геодезических сетях.

В высокоточных геодезических работах применяют более строгие формулы.

**Масштаб изображения и поправка в длину линии. Масштаб длин.** Так как в равноугольной проекции частный масштаб длин не зависит от направления, то рассмотрим отношение соответственных бесконечно малых отрезков параллели на плоскости и на эллипсоиде:

$$m = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{rdl} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2}.$$

После преобразований получают:

$$m = m_0 \left[ 1 + \cos^2 B (1 + \eta^2) \frac{l^2}{2} + \cos^4 B (5 - 4 \operatorname{tg}^2 B) \frac{l^4}{24} \right].$$

При  $l = 0$  и  $m_0 = 1$ , т.е. на осевом меридиане в проекции Гаусса-Крюгера, масштаб во всех точках равен единице. С удалением от осевого меридиана к востоку или к западу масштаб изображения быстро увеличивается. При этом на плоскости линии длиннее, чем на эллипсоиде.

Заменяя разности долгот  $l$  ординатами  $y$ , отсчитываемыми от осевого меридиана, получают ( $R$  — средний радиус кривизны эллипса):

$$m = m_0 \left( 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4} \right).$$

В работе [1] для проекции Гаусса-Крюгера предложена формула следующего вида:

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 - (V \cos B \sin l)^2}}.$$

В табл. 5.1 приведены значения масштабов  $m$  на разных удалениях от осевого меридиана. В южных широтах России в шестиградусной зоне разность масштабов длин на осевом и границном меридианах составляет 0,09 %.

**Поправка в длину линии.** Исследования показывают, что для линий короче 60 км разность длин изображений геодезической линии на плоскости и ее хорды не превышает одного миллиметра. Поэтому можно полагать, что хорда и изображение геодезической линии по длине одинаковы. Для длин хорды  $d$  и геодезической линии  $s$  на эллипсоиде можно записать:

$$d = \int_0^s m ds.$$

Интеграл легко вычислить по формуле Симпсона, разделив линию на две части. Функцию под интегралом надлежит вычислить в трех точках — в начальной, средней и конечной. Все величины, относящиеся к средней точке, помечены индексом  $m$ . Получаем:

$$d = \frac{s}{6} (m_l + 4m_m + m_r),$$

Радиус  $R$  достаточно вычислять только по данным для средней точки, а в членах с четвертой степенью полагать  $y_1^4 = y_2^4 = y_m^4$ . Эти допущения при длинах хорд до 60 км заметных ошибок не вызывают. Окончательно для проекции Гаусса-Крюгера получают:

$$d = s + \left( \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4} \right) s.$$

В формуле используются ординаты, отсчитываемые от осевого меридиана. Второй член в формуле представляет собой *поправку*, которую надо ввести в длину геодезической линии на эллипсоиде, чтобы получить ее длину на плоскости в проекции Гаусса-Крюгера.

Приближённая формула для поправки имеет следующий вид:

$$\Delta s = 0,123 y_m^2 s,$$

в которой средняя ордината  $y_m$  выражена в сотнях километров, длина линии  $s$  — в километрах, поправка  $\Delta s$  — в метрах. При  $y_m = 100$  км,  $s = 1$  км, поправка  $\Delta s = 0,123$  м.

**Масштаб площади.** Для равноугольных проекций он вычисляется по формуле:

$$p = m^2.$$

Таблица 5.1

Масштабы длин и площадей в проекции Гаусса-Крюгера

Удаления от осевого меридиана по долготе	Масштаб линий $m$	Масштаб площадей $p$
0°00'	1,00000	1,00000
0°30'	1,00002	1,00004
1°00'	1,00010	1,00020
1°30'	1,00023	1,00046
2°00'	1,00039	1,00078
2°30'	1,00063	1,00126
3°00'	1,00090	1,00180

В таблице 5.1 приведены значения масштабов  $p$  и  $m$  на разных удалениях от осевого меридиана для южных широт России. Можно составить себе представление, как они изменяются в пределах листов топографических карт. Так, на листах стотысячной карты наибольшие различия в масштабах длин составляют 0,027 %, а площадей - 0,054 %. На листе карты масштаба 1:1 000 000 эти различия соответственно равны 0,09 % и 0,18 %. Предельная графическая точность карты равна 0,2 мм. Если погрешность измерения на карте стороны квадрата в 100 мм равна 0,1 мм, то это соответствует относительным погрешностям определения длин 0,1 % и площади квадрата — 0,2 %. Таким образом, при выполнении картометрических работ на топографических картах всех масштабов в пределах одной шестиградусной зоны искажениями длин и площадей можно пренебрегать.

**Преобразования координат Гаусса-Крюгера.** Геоинформационное поле может находиться в разных системах координат. Возникает необходимость установления взаимосвязи между координатными системами. Могут иметь место два случая: 1) две координатные системы даны в одной и той же проекции Гаусса-Крюгера, но отнесены к разным смежным зонам; 2) одна из систем определена в другой проекции. В первом случае задача заключается в перевычислению координат из данной зоны в соседнюю зону. Во втором случае задача решается в два этапа: а) перевычисляют координаты пунктов другой равноугольной проекции в координаты Гаусса-Крюгера, сохранив прежний осевой меридиан, б) полученные координаты пересчитывают еще раз для перехода к стандартному ближайшему осевому меридиану.

**Пересчет координат Гаусса-Крюгера из зоны в зону.** Обычно осевые меридианы отличаются по долготе на 3° или 6°. Для перевычислений применяются два способа.

Первый способ состоит в том, что плоские координаты  $x$ , у перевычисляют в геодезические координаты  $B$  и  $l$ . Затем разность долгот  $l$  изменяют на величину  $l_0$ , равную разности долгот осевых меридианов, и по координатам  $B$  и  $l \pm l_0$  вновь вычисляют плоские координаты. Этот способ в настоящее время является основным.

Суть второго способа заключается в преобразовании плоских координат без промежуточного перехода к геодезическим координатам. Теория этого способа изложена в монографии [12]. Пусть даны две системы координат Гаусса-Крюгера, отнесенные к осевым меридианам с долготами  $L_0$  и  $L'_0$ :

$$z = x + iy, \quad z' = x' + y'.$$

Вопрос о преобразовании координат сводится к представлению  $z'$  как функции  $z$ . Выбирается некоторая промежуточная точка  $z_0$  и соответствующая ей точка  $z'_0$ . Тогда

$$z' = f(z_0 + (z - z_0)).$$

Функция раскладывается в ряд Тейлора

$$z' = z_0 + \left( \frac{dz'}{dz} \right)_0 (z - z_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 z'}{dz^2} \right)_0 (z - z_0)^2 + \dots$$

Степень ряда определяется дополнительными соображениями. Формулы получаются довольно громоздкими.

Напомним, что на листах топографических карт, примыкающих к границам зон, за рамками штрихами показаны выходы координатных линий соседней зоны, которые следует использовать при пересчетах координат с графической точностью.

**Трансформирование плоских прямоугольных координат.** Топографические планы и карты строят в равноугольных проекциях. Например, плоские прямоугольные координаты ( $u, v$ ) из равноугольной проекции UTM эллипсоида WGS-84 трансформируются в координаты ( $x, y$ ) в проекции Гаусса-Крюгера в системе ГСК-2011.

Рассмотрим приближенное решение поставленной задачи, применимое для малых территорий. Для этого можно использовать аналитическую функцию комплексной переменной, реализующей параллельный перенос начала координат, поворот координатных осей и масштабирование координат [8]:

$$z = z_0 + cw,$$

где исходные и преобразуемые координаты соответственно равны:

$$w = u + iv, \quad z = x + iy, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Для выполнения вычислений необходимы два комплексных (четыре числовых) параметра:

$$z_0 = x_0 + iy_0, \quad c = \alpha + i\beta.$$

Все параметры легко вычислить по двум опорным точкам, для которых известны координаты  $w_1, w_2$  и  $z_1, z_2$ . После элементарных преобразований для вычисления параметров трансформирования получаем следующие выражения:

$$c = (z_2 - z_1)/(w_2 - w_1);$$

$$2z_0 = (z_1 + z_2) - c(w_1 + w_2).$$

Когда опорных пунктов более двух ( $n > 2$ ), параметры трансформирования вычисляются более точно по методу наименьших квадратов. Вычисления выполняются по формулам:

$$x = x_o + \alpha u - \beta v,$$

$$y = y_o + \alpha v + \beta u.$$

Четыре параметра трансформирования  $x_o, y_o, \alpha, \beta$  определяют сдвиг начала координат по каждой координатной оси, разворот координатных осей и умножение всех координат на масштабный одинаковый коэффициент. С целью определения этих параметров обозначено через  $\Delta u, \Delta v, \Delta x, \Delta y$  уклонения координат от их средних значений. Средние значения помечены чертой сверху. Тогда параметры трансформирования вычисляются по формулам:

$$\bar{u} = [u]/n, \quad \bar{v} = [v]/n,$$

$$\bar{x} = [x]/n, \quad \bar{y} = [y]/n,$$

$$\alpha = [\Delta u \Delta x + \Delta v \Delta y] / [\Delta u^2 + \Delta v^2],$$

$$\beta = [\Delta u \Delta y - \Delta v \Delta x] / [\Delta u^2 + \Delta v^2],$$

$$x_o = \bar{x} - \alpha \bar{u} + \beta \bar{v},$$

В этих формулах применена символика Гаусса – в ломанных скобках заключены суммы указанных в них величин. Например, запись  $[x]$  обозначает сумму всех значений  $x$ .

Перейдя от декартовых координат к полярным координатам, получим выражения для коэффициента масштабирования  $\mu$  и угла поворота  $\gamma$ :

$$\mu = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \gamma = \arctg(\beta / \alpha).$$

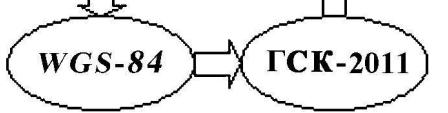


Рис. 5.5. Схема трансформирования координат UTM WGS-84 в координаты Гаусса-Крюгера в ГСК-2011

**Перевычисление прямоугольных координат UTM в прямоугольные координаты Гаусса-Крюгера.** Предполагается, что координаты UTM отнесены к эллипсоиду WGS-84, а координаты Гаусса-Крюгера – к эллипсоиду ГСК-2011. Схема решения задачи следующая (рис. 5.5).

Прямоугольные координаты UTM пересчитываются в геодезические координаты. Геодезические координаты трансформируются из системы отсчета WGS-84 в ГСК 2011. По трансформированным широтам, долготам и высотам вычисляются новые высоты и плоские координаты Гаусса-Крюгера.

**Государственные и местные системы плоских координат в РФ.** Отметим следующие системы, предназначенные для использования при осуществлении геодезических и картографических работ:

- Система геодезических координат 1942 года (СК-42), введенная постановлением Совета Министров СССР от 7 апреля 1946 г. № 760.
- Система геодезических координат 1995 года (СК-95), установленная постановлением Правительства Российской Федерации от 28 июля 2000 г. № 568.
- Геодезическая система координат 2011 года (ГСК-2011), установленная постановлением Правительства Российской Федерации от 28 декабря 2012 г. № 1463.
- Система координат 1963 г. (СК-63) – специальная искажённая система координат. Отменена Постановлением ЦК КПСС и СМ СССР от 25 марта 1987 г. Однако созданные материалы разрешено и в дальнейшем использовать.

Эти системы применяются до 1 января 2017 г. в отношении материалов (документов), созданных с их использованием.

Наряду с этим создавался материал в виде результатов инженерных изысканий, крупномасштабных планов, данных государственного кадастра недвижимости в местных системах координат. Подробнее местные системы описаны в [3]. Таких систем сейчас существует порядка 30 тысяч. Основная часть местных систем координат и координат в СК-63 основана на координатах СК-42. Их модернизация, разработка алгоритмов и математических моделей пересчета в координаты ГСК-2011 в настоящее время является актуальной задачей [612].

**Публикации других авторов.** Приведенные формулы, с некоторыми непринципиального характера изменениями, изложены в многочисленной научной, учебной, справочной и нормативной литературе. По координатам Гаусса-Крюгера имеется обстоятельная монография В.К. Христова [12]. Многие авторы научной и учебной литературы ссылаются на учебник В.П. Морозова [9]. Соответствующие формулы, уже подвергшиеся критике, имеются в ГОСТе [7]. В работе А.П. Герасимова [2] приведены формулы для вычислений геодезических и прямоугольных координат Гаусса-Крюгера с точностью, соответствующей ~1 мм при удалениях от осевого меридиана до 9°; таким образом, охватывается не только вся шестиградусная зона, но еще и соседние зоны с востока и с запада. Подробный вывод этих формул

дан в работе [4]. Соответствующие выводы имеются в учебном пособии [11] и в практикуме [10], где дана программа для вычислений.

Авторы публикации [1] полагают, что все формулы, представляемые рядами до высоких степеней, довольно громоздки. Предложили новый алгоритм, обеспечивающий в 6-градусной зоне геодезическую точность до долей миллиметров.

#### **Источники информации по Лекции 5**

1. Баландин В.Н., Брынь М.Я., Меньшиков И.В., Фирсов Ю.Г. Вычисление плоских прямоугольных координат, сближения меридианов и масштаба проекции Гаусса в 6-градусной зоне по геодезическим координатам. Геодезия и картография. 2014. №2, с. 11-13.
2. Герасимов А.П. Спутниковые геодезические сети. – М.: ООО «Проспект». 2012. -176 с.
3. Герасимов А.П., Назаров В.Г. Местные системы координат. – М: ООО «Издательство «Проспект», 2010. – 64 с.
4. Герасимов А.П. Уравнивание государственной геодезической сети. -М.: Картгеоцентр-Геоиздат. 1996. -216 с.
5. ГКИНП-05-029-84. Основные положения по содержанию топографических карт масштабов 1:25000, 1:50000, 1:100000, 1:200000, 1:500000, 1:1000000. - М., РИО ВТС, 1984.
6. Горобец В.П., Демьянин Г.В., Майоров А.Н., Побединский Г.Г. Современное состояние и направления развития геодезического обеспечения РФ. Системы координат. Геопрофи. 2013. №6, с. 4-9.
7. ГОСТ Р 51794-2008. Глобальные навигационные спутниковые системы. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек. - М.: Стандартинформ. 2009. -16 с.
8. Кёниг Р., Вейзе К. Математические основы высшей геодезии и картографии. М.: Изд-во иностранной литературы, 1954. С. 416.
9. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии. Учебник для вузов. – М.: Недра, 1979. –260 с.
10. Серапинас Б. Б. Практикум по геодезическим основам карт. Учебное пособие. - М.: Географический факультет МГУ. 2008. -146 с.
11. Серапинас Б. Б. Геодезические основы карт. Учебное пособие. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. -132 с.
12. Христов В.К. Координаты Гаусса-Крюгера на эллипсоиде вращения. М.: Издательство геодезической литературы. 1957. - 264 с.

#### **Контрольные вопросы**

1. Требования к выбору проекций для построения прямоугольных координат на плоскости. Изометрические координаты.
2. Система координат в проекции Гаусса. Координаты Гаусса-Крюгера и *UTM*. Необходимые формулы для их вычислений. Использование разложений функций комплексной переменной в ряды Тейлора. Гауссово сближение меридианов. Поправка за кривизну изображения геодезической линии. Масштаб длин и поправки в длины линий.
3. Преобразования координат Гаусса-Крюгера. Пересчёт координат из зоны в зону. Перевычисление координат *UTM* в координаты Гаусса-Крюгера. Государственные и местные системы плоских координат в РФ.